数理解析研究所講究録 1460 巻 2005 年 1-10

Symplectic 等質空間と随伴軌道について[1]

大阪市立大学・数学研究所　坊向　伸隆 (Nobutaka Boumuki)
Advanced Mathematical Institute
Osaka City University

1　紹介.

ケーラー等質空間 (cf. [9]), 擬ケーラー等質空間 (cf. [4]) やパラケーラー等質空間 (cf. [6]) などの構造研究や分類研究は多くの研究者により進められています. しかし, それらを包括する[2] 概念にあたるシンプレクティック等質空間の構造研究や分類研究には未だ進展の余地が多く存在しています. そのことから, 今現在, 私はシンプレクティック等質空間の構造研究や分類研究を進めています (cf. [2]). 本稿では, 推移的に作用している群 G が非コンパクト実単純かつそのイソトロピー部分群 H がコンパクトであるシンプレクティック等質空間 (G, H, Ω) の分類研究を随伴軌道との関係を用いて進めます.

注意 1.1 . リー代数 $\mathfrak{g}$ が単純であるとは, $\mathfrak{g}$ は $\{0\}$ と $\mathfrak{g}$ 以外のイデアルを含まず, かつ $\dim \mathfrak{g} \geq 2$ であるものとします.

シンプレクティック等質空間 (G, H, Ω) とは, 1974 年に Bon-Yao Chu 先生 (cf. [3]) により提唱された概念であり, その定義は次で与えられます:

定義 1.1 . (G, H, Ω) が**シンプレクティック等質空間**であるとは,
$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

(1) G : 有限次元連結実リー群;

(2) H : G の閉連結部分群;

---

[1]This paper is supported by the 21 COE program "Constitution of wide-angle mathematical basis focused on knots."

[2]一般に有限次元連結実リー群 G がシンプレクティック多様体 (M, Ω) 上に推移的に作用している時, それを等質空間として表示 $(M, \Omega) = (G/H, \Omega)$ する場合, H が連結になるとは限りません. ですので, 定義 1.1 の (2) から "包括する" という言葉は不適切かも知れません. しかし, H の単位連結成分 H_0 をとり, 被覆 $\mathrm{Pr} : G/H_0 \to G/H$ を考え, $\Omega_0 := \mathrm{Pr}^* \Omega$ と定義すると (G, H_0, Ω_0) はシンプレクティック等質空間となります.

(3) Ω : 商多様体 G/H 上の G-不変なシンプレクティック形式.

注意 1.2 . 本稿では, 0-次元多様体もシンプレクティック等質空間と考えています.

ここで, シンプレクティック等質空間の例を紹介しておきます.

例 1.1 . G を有限次元連結実半単純リー群とし, $\mathfrak{g}$ を G のリー代数とします. G の $\mathfrak{g}$ 上への随伴作用 Ad を考え, 1 つの元 $Z \in \mathfrak{g}$ に関する軌道 $\mathrm{Ad}(G)Z$ を商空間として表示します: $G/C_G(Z)$. ただし, $C_G(Z) = \{g \in G \,|\, \mathrm{Ad}(g)Z = Z\}$. このとき, $G/C_G(Z)_0$ 上に Z に依存して定まる G-不変なシンプレクティック形式 Ω_Z が存在し, $(G, C_G(Z)_0, \Omega_Z)$ はシンプレクティック等質空間となることが示せます. ただし, $C_G(Z)_0$ は $C_G(Z)$ の単位連結成分.
<Ω_Z の構成の概略 > $\pi : G \to G/C_G(Z)_0$ を射影, $B_{\mathfrak{g}}$ を $\mathfrak{g}$ のキリング形式とし, $G/C_G(Z)_0$ の原点 $o = \pi(e)$ におけるシンプレクティック形式 $(\Omega_Z)_o$ を

$$(\Omega_Z)_o(u, v) := -B_{\mathfrak{g}}(Z, [X, Y])$$

for $u = \pi_{*e}X_e$, $v = \pi_{*e}Y_e \in T_o\big(G/C_G(Z)_0\big)$ $(X, Y \in \mathfrak{g})$ で定義する.

注意 1.3 . π を G から $G/C_G(Z)$ の上への射影とすると, 上の Ω_Z は $G/C_G(Z)$ 上の G-不変なシンプレクティック形式となります.

実は, 以下が成り立ちます:

補題 1.1 . G が半単純なるシンプレクティック等質空間 (G, H, Ω) に対して, ある一意的な元 $Z \in \mathfrak{g}$ が存在し, $(G, H, \Omega) = (G, C_G(Z)_0, \Omega_Z)$ となる.

◇ 上の補題 1.1 を認めるならば, 今回考えている『G が非コンパクト単純かつ H がコンパクトなるシンプレクティック等質空間 (G, H, Ω) はどの様な元の随伴軌道なのか?』ということになります. その点を解明することが本稿の主目的です. また, そのことにより次の定理並びに第 3 章の表を得ることができます.

定理 . シンプレクティック等質空間 $\big(SU(l+1-k, k)/\mathbb{Z}_{l+1}, H, \Omega\big)$ $(l \geq 1, 1 \leq k \leq l)$

に対して, もし H がコンパクトであるならば, そのとき,

$\exists\psi : SU(l+1-k,k)/\mathbb{Z}_{l+1}$ の内部自己同型写像;

$0 \leq \exists m \leq k-1$;

$0 \leq \exists a_1 \leq \cdots \leq \exists a_m \leq \exists a_{m+1} \leq k-1$ with $a_1 + \cdots + a_m + a_{m+1} = k-1-m$;

$0 \leq \exists n \leq l-k$;

$0 \leq \exists b_1 \leq \cdots \leq \exists b_n \leq \exists b_{n+1} \leq l-k$ with $b_1 + \cdots + b_n + b_{n+1} = l-k-n$;

$\exists\lambda_1, \ldots, \exists\lambda_{m+n+1} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

such that

$\Big(SU(l+1-k,k)/\mathbb{Z}_{l+1}, H, \Omega\Big)$ は写像 ψ により $\Big(SU(l+1-k,k)/\mathbb{Z}_{l+1}, \big(S\big(U(a_1+1) \times \cdots \times U(a_{m+1}+1) \times U(b_1+1) \times \cdots \times U(b_{n+1}+1)\big)\big)/\mathbb{Z}_{l+1}, \Omega_{\lambda_1 X_1 + \cdots + \lambda_{m+n+1} X_{m+n+1}}\Big)$ と同値である. ただし, $\{X_1, \ldots, X_{m+n+1}, \ldots, X_l\}$ は $\mathfrak{su}(l+1-k,k)$ のあるカルタン部分代数の基底.

謝辞 . この研究集会 (『部分多様体の微分幾何学』 於 京都大学数理解析研究所) にて講演する機会を与えて下さった田丸博士先生に心より感謝致します.

2 準備.

2.1 シンプレクティック等質空間.

まず, 本稿におけるカテゴリーを紹介しておきます.

$$\mathbf{S.H.} := \{\text{ シンプレクティック等質空間 } (G,H,\Omega) \text{ の全体 }\}$$

と集合 **S.H.** を定義し, **S.H.** 上に同値関係を次で定義します:

(G,H,Ω) は (G',H',Ω') と**同値**である.

$\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$

次の条件 (1) と (2) を満たす G から G' の上へのリー群の同型写像 ϕ が存在する: (1) $\phi(H) = H'$; (2) G/H から G'/H' の上への G-同変な微分同型写像 Φ を $gH \mapsto \phi(g)H'$ で定義したとき, Φ はシンプレクティック同型である, i.e. $\Phi^*\Omega' = \Omega$.

$*$ 上の状況下において, “(G,H,Ω) は写像 ϕ により (G',H',Ω') と同値である” ということにします.

2.2 局所シンプレクティック等質空間.

シンプレクティック等質空間の無限小版にあたる概念として, 次を定義しておきます (cf. [2]):

定義 2.1 . $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \omega)$ が**局所シンプレクティック等質空間**であるとは,
$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

(i) $\mathfrak{g}$: 有限次元実リー代数;

(ii) ω : $\mathfrak{g}$ のベクトル空間 $\mathbb{R}^1$ における自明表現に関する 2-コサイクル;

(iii) $\mathfrak{h} = \{Z \in \mathfrak{g} \,|\, \forall X \in \mathfrak{g},\, \omega(X, Z) = 0\}$.

注意 2.1 . $\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{g}$ と ω に依存して定まると考えられるので, $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \omega)$ を $(\mathfrak{g}, \omega)$ と表すことがあります.

注意 2.2 . 局所シンプレクティック等質空間 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \omega)$ から単連結なシンプレクティック等質空間 (G, H, Ω) を構成できます (cf. [2]).

最後に, 局所シンプレクティック等質空間 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \omega)$ の例を二つほど挙げてこの第 2 章を終わりにします.

例 2.1 . $\mathfrak{g}$ を有限次元実リー代数とし, $B_{\mathfrak{g}}$ をそのキリング形式とします. 一つ元 $Z \in \mathfrak{g}$ を固定して

$$\omega_Z(X, Y) := -B_{\mathfrak{g}}(Z, [X, Y]) \quad \text{for}\, \forall X, Y \in \mathfrak{g} \tag{1}$$

で ω_Z を定義すると, $(\mathfrak{g}, \omega_Z)$ は局所シンプレクティック等質空間となります.

例 2.2 . $(G, H, \Omega) \in$ **S.H.** とし, $\mathfrak{g}$ を G のリー代数, $\pi : G \to G/H$ を射影とします. このとき,

$$\omega := \pi^* \Omega$$

とおくと, $(\mathfrak{g}, \omega)$ は局所シンプレクティック等質空間となります. ちなみに, H のリー代数は $\mathfrak{h} = \{Z \in \mathfrak{g} \,|\, \forall X \in \mathfrak{g},\, \omega(X, Z) = 0\}$ に一致します.

3 結果.

3.1 Gが半単純なる$(G,H,\Omega)\in$ S.H. について.

$(\mathfrak{g},\mathfrak{h},\omega)$ を (G,H,Ω) から例 2.2 により構成される局所シンプレクティック等質空間とします. このとき, $\mathfrak{g}$ が半単純であることから, 例 2.1 の (1) により定義される $\mathfrak{g}$ から $Z^2(\mathfrak{g})$ への写像 $Z\mapsto\omega_Z$ は上への線形同型写像となります (ただし, $Z^2(\mathfrak{g})$ は $\mathfrak{g}$ のベクトル空間 $\mathbb{R}^1$ における自明表現に関する 2-コサイクル全体のなす実ベクトル空間). 従って, 一意的な元 $Z\in\mathfrak{g}$ が存在して

$$(\mathfrak{g},\mathfrak{h},\omega)=(\mathfrak{g},\mathfrak{c}_{\mathfrak{g}}(Z),\omega_Z)$$

となります (ただし, $\mathfrak{c}_{\mathfrak{g}}(Z)$ は Z の $\mathfrak{g}$ における中心化代数). $*$ このことから補題 1.1 が示せます.

3.2 Gが非コンパクト単純かつHがコンパクトなる$(G,H,\Omega)\in$ S.H. について.

注意 3.1 . 以下, この第 3 章第 2 節ではリー群 G の中心は有限であるとします.

3.2.1 必要条件.

まず以下の問いに対して解答を与えます.

問い “G が非コンパクト単純かつ H がコンパクトなるシンプレクティック等質空間 $(G,H,\Omega)=(G,C_G(Z)_0,\Omega_Z)$ ($\exists 1 Z\in\mathfrak{g}$: cf. 補題 1.1) に対して, Z はどの様な条件を満たす元なのか ?”

G は連結 (単純) リー群なのでコンパクト部分群 H を含む G の極大コンパクト部分群 K が存在します[3]. ここで, K のリー代数を $\mathfrak{k}$ とし, $\mathfrak{g}$ のカルタン分解を $\mathfrak{g}=\mathfrak{k}\oplus\mathfrak{p}$ とします. このとき, $\mathfrak{c}_{\mathfrak{g}}(Z)=\mathfrak{h}\subset\mathfrak{k}$ かつ $[\mathfrak{k},\mathfrak{p}]\subset\mathfrak{p}$ となり次の解答を得ます:

解答 Z は以下の条件を満たす元である:

(a) $Z\in\mathfrak{k}$;

[3] 一般に, “G が連結” という仮定のみでこの極大コンパクト部分群 K の存在が示せるようですが, 私の力では “G の中心が有限である” という仮定がないと示せません.

(b) $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(Z)|_{\mathfrak{p}}: \mathfrak{p} \longrightarrow \mathfrak{p}$, 線形同型.

上の状況下において, $\mathrm{rank}(\mathfrak{k}) = \mathrm{rank}(\mathfrak{g})$ となることより次に注意しておきます:

注意 3.2 . $G = SL(n,\mathbb{R})$ with $n \geq 3$, $SU^*(2n)$ with $n \geq 2$, $SO_0(2i+1, 2n-2i-1)$ with $n \geq 4$ & $0 \leq i \leq n-1$, $E_{6(6)}$, $E_{6(-26)}$, $(SL(n,\mathbb{C}))_{\mathbb{R}}$ with $n \geq 2$, $(SO(2n+1,\mathbb{C}))_{\mathbb{R}}$ with $n \geq 2$, $(Sp(n,\mathbb{C}))_{\mathbb{R}}$ with $n \geq 3$, $(SO(2n,\mathbb{C}))_{\mathbb{R}}$ with $n \geq 4$, $({G_2}^{\mathbb{C}})_{\mathbb{R}}$, $({F_4}^{\mathbb{C}})_{\mathbb{R}}$, $({E_6}^{\mathbb{C}})_{\mathbb{R}}$, $({E_7}^{\mathbb{C}})_{\mathbb{R}}$, または $({E_8}^{\mathbb{C}})_{\mathbb{R}}$ のいずれかである場合, H がコンパクトなるシンプレクティック等質空間 (G, H, Ω) は存在しない.

3.2.2 十分条件.

次に以下の問いに対して解答を与えます.

$\boxed{\text{問い}}$ "次の条件を満たす元 $Z' \in \mathfrak{g}$ に関する $(G, C_G(Z')_0, \Omega_{Z'})$ はどの様な性質をもつシンプレクティック等質空間なのか ?"

(a) $Z' \in \mathfrak{k}'$;

(b) $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(Z')|_{\mathfrak{p}'}: \mathfrak{p}' \longrightarrow \mathfrak{p}'$, 線形同型.

ただし, $\mathfrak{g} = \mathfrak{k}' \oplus \mathfrak{p}'$ は $\mathfrak{g}$ のカルタン分解.

G は有限な中心をもつ連結 (半) 単純リー群なので, G の極大コンパクト部分群 K' でそのリー代数が $\mathfrak{k}'$ となるものが存在し $K' \times \mathfrak{p}'$ と G は写像 $(k', Y') \mapsto k' \cdot \exp Y'$ により微分同型となります. そして, 条件 (a) と (b) より

$$C_G(Z')_0 = C_G(Z') = C_{K'}(Z')$$

となり次の解答を得ます:

$\boxed{\text{解答}}$ $(G, C_G(Z')_0, \Omega_{Z'})$ は以下の性質をもつ:

(i) $C_G(Z')_0$ が G のコンパクト部分群.

以上の条件を満たす元の随伴軌道から定理並びに次の表を得ることができます.

表

G	H	Ω
$SL(2,\mathbb{R})/\mathbb{Z}_2$ * Kähler	$SO(2)/\mathbb{Z}_2$	$\Omega_{\lambda_1 X_1}$
$SU(l+1-k,k)/\mathbb{Z}_{l+1}$ $l \geq 1,\ 1 \leq k \leq l,$ $(l,k) \neq (1,1)$ * Kähler	$\big(S\big(U(a_1+1) \times \cdots \times U(a_{m+1}+1)$ $\times U(b_1+1) \times \cdots \times U(b_{n+1}+1)\big)\big)/\mathbb{Z}_{l+1},$ $0 \leq m \leq k-1,$ $0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_m \leq a_{m+1} \leq k-1,$ $a_1 + \cdots + a_m + a_{m+1} = k-1-m,$ $0 \leq n \leq l-k,$ $0 \leq b_1 \leq \cdots \leq b_n \leq b_{n+1} \leq l-k,$ $b_1 + \cdots + b_n + b_{n+1} = l-k-n.$	$\Omega_{\sum_{i=1}^{m+n+1} \lambda_i X_i}$
$SO_0(2l-1-2k,2k+2)$ $l \geq 2,\ 1 \leq k \leq l-1.$ * pseudo-Kähler	$SO(2a+1) \times U(a_1+1) \times \cdots \times U(a_{m+1}+1)$ $\times U(b_1+1) \times \cdots \times U(b_n+1),$ $0 \leq m \leq k,$ $0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_m \leq a_{m+1} \leq k,$ $a_1 + \cdots + a_m + a_{m+1} = k-m,$ $0 \leq n \leq l-k-1,$ $0 \leq b_1 \leq \cdots \leq b_n \leq l-k-1,$ $0 \leq a \leq l-k-1,$ $a + b_1 + \cdots + b_n = l-k-1-n.$	$\Omega_{\sum_{i=1}^{m+n+1} \lambda_i X_i}$
$SO_0(2l-1,2)$ $l \geq 2.$ * Kähler	$SO(2) \times SO(2a+1) \times U(b_1+1)$ $\times \cdots \times U(b_m+1),$ $0 \leq m \leq l-1,$ $0 \leq b_1 \leq \cdots \leq b_m \leq l-1,$ $0 \leq a \leq l-1,$ $a + b_1 + \cdots + b_m = l-1-m.$	$\Omega_{\sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i X_i}$
$Sp(l-k,k)/\mathbb{Z}_2$ $l \geq 3,\ 1 \leq k \leq l-1.$ * pseudo-Kähler	$\big(Sp(a) \times U(a_1+1) \times \cdots \times U(a_{m+1}+1)$ $\times U(b_1+1) \times \cdots \times U(b_n+1)\big)/\mathbb{Z}_2,$ $0 \leq m \leq k-1,$ $0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_m \leq a_{m+1} \leq k-1,$ $a_1 + \cdots + a_m + a_{m+1} = k-1-m,$ $0 \leq n \leq l-k,$ $0 \leq b_1 \leq \cdots \leq b_n \leq l-k,$ $0 \leq a \leq l-k,$ $a + b_1 + \cdots + b_n = l-k-n.$	$\Omega_{\sum_{i=1}^{m+n+1} \lambda_i X_i}$
$Sp(l,\mathbb{R})/\mathbb{Z}_2$ $l \geq 3.$ * Kähler	$\big(U(a_1+1) \times \cdots \times U(a_{m+1}+1)\big)/\mathbb{Z}_2,$ $0 \leq m \leq l-1,$ $0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_m \leq a_{m+1} \leq l-1,$ $a_1 + \cdots + a_m + a_{m+1} = l-1-m.$	$\Omega_{\sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i X_i}$
$SO_0(2l-2k-2,2k+2)/\mathbb{Z}_2$	$\big(SO(2a) \times U(a_1+1) \times \cdots \times U(a_{m+1}+1)$	$\Omega_{\sum_{i=1}^{m+n+1} \lambda_i X_i}$

G	H	Ω
$l \geq 4,\ 1 \leq k \leq l-3.$ * pseudo-Kähler	$\quad \times U(b_1+1) \times \cdots \times U(b_n+1))/\mathbb{Z}_2,$ $0 \leq m \leq k,$ $0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_m \leq a_{m+1} \leq k,$ $a_1 + \cdots + a_m + a_{m+1} = k - m,$ $0 \leq n \leq l-k-1,$ $0 \leq b_1 \leq \cdots \leq b_n \leq l-k-1,$ $0 \leq a \leq l-k-1,$ $a \neq 1,$ $a + b_1 + \cdots + b_n = l - k - 1 - n.$	
$SO_0(2l-2,2)/\mathbb{Z}_2$ $l \geq 4.$ * Kähler	$\big(SO(2) \times SO(2a) \times U(b_1+1)$ $\quad \times \cdots \times U(b_m+1)\big)/\mathbb{Z}_2,$ $0 \leq m \leq l-1,$ $0 \leq b_1 \leq \cdots \leq b_m \leq l-1,$ $0 \leq a \leq l-1,$ $a \neq 1,$ $a + b_1 + \cdots + b_m = l - 1 - m.$	$\Omega_{\sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i X_i}$
$SO^*(2l)/\mathbb{Z}_2$ $l \geq 4.$ * Kähler	$\big(U(a_1+1) \times \cdots \times U(a_{m+1}+1)\big)/\mathbb{Z}_2,$ $0 \leq m \leq l-1,$ $0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_m \leq a_{m+1} \leq l-1,$ $a_1 + \cdots + a_m + a_{m+1} = l - 1 - m.$	$\Omega_{\sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i X_i}$

注意 3.3 . この表には, $\big(SL(2,\mathbb{R})/\mathbb{Z}_2, SO(2)/\mathbb{Z}_2, \Omega_{\lambda_1 X_1}\big) \sim \big(SU(1,1)/\mathbb{Z}_2, \big(S(U(1)\times U(1))\big)/\mathbb{Z}_2, \Omega_{\lambda_1 X_1}\big)$ のような低次元非コンパクト実単純リー群の同型による同値は含まれていません.

注意 3.4 . この表では, ケーラー等質空間の構造を持つものについて $*$ Kähler, 擬ケーラー等質空間の構造を持つものについて $*$ pseudo-Kähler とそれぞれ記しています.

4 余談.

G が半単純なるシンプレクティック等質空間 $(G,H,\Omega) = (G, C_G(Z)_0, \Omega_Z)$ ($\exists 1 Z \in \mathfrak{g}$) と随伴軌道の関連についてもう少しだけふれ (cf. [7]), 私の今後の研究課題を述べます.

G を有限次元連結実半単純リー群とし, $\mathfrak{g}$ をそのリー代数とします. このとき半単純元 $Z \in \mathfrak{g}$ に関する随伴軌道を考えると $(G, C_G(Z)_0, \Omega_Z)$ は $G/C_G(Z)_0$ が reductive

等質空間なるシンプレクティック等質空間になることが分かります (ここで, $Z \in \mathfrak{g}$ が半単純元であるとは $\mathfrak{g}$ の一次変換 $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}Z$ が $\mathbb{C}$ 上で対角化可能であるものを指します). 特に, 半単純元 Z の全ての固有値が純虚数であるとき Z を**楕円元**と呼び, その元に関するシンプレクティック等質空間 $(G, C_G(Z)_0, \Omega_Z)$ は擬ケーラー等質空間の構造を持つことが知られています. また, 半単純元 Z の全ての固有値が実数であるとき Z を**双曲元**と呼び, その元に関するシンプレクティック等質空間 $(G, C_G(Z)_0, \Omega_Z)$ はパラケーラー等質空間の構造を持つことが知られています.

例 4.1 . $G = SL(2,\mathbb{R})$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ とします. $Z = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{g}$ なる元 Z を考えます. すると, $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 上の $\mathbb{C}$-基底 $\left\{ e_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{-1} & 1 \\ 1 & -\sqrt{-1} \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} -\sqrt{-1} & 1 \\ 1 & \sqrt{-1} \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ により $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}}Z$ は

$$\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}}Z = \begin{pmatrix} -2\sqrt{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 2\sqrt{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

と行列表示されるので, Z は楕円元です. この元 Z に関する随伴軌道を考えると $(G, C_G(Z)_0, \Omega_Z) = (SL(2,\mathbb{R}), SO(2), \Omega_Z)$ となり (擬) ケーラー等質空間の構造を持つことが分かります.

また, $Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{g}$ なる元 Z を考えると, Z は双曲元となること, そして, $(G, C_G(Z)_0, \Omega_Z) = (SL(2,\mathbb{R}), SO_0(1,1), \Omega_Z)$ となりパラケーラー等質空間の構造を持つことが分かります.

以上のことからも半単純元 Z に関する随伴軌道からなるシンプレクティック等質空間 $(G, C_G(Z)_0, \Omega_Z)$ について研究することは重要であると思います. そのことから (既に表現論などの分野では研究済みかも知れませんが…) 今後の研究課題としてその分類研究や構造研究に着手したいと考えています. また, ジョルダン分解により任意の元 $X \in \mathfrak{g}$ は $[X_s, X_n] = 0$ を満たす半単純元 X_s と冪零元 X_n により一意的に $X = X_s + X_n$ と表示されることから, 冪零軌道の分類研究についても理解を深めたいと考えています.

参考文献

[1] A. Borel, *Kählerian coset spaces of semisimple Lie groups*, Nat. Acad. Sci. U.S.A. **40**(1954), 1147–1151.

[2] N. Boumuki, *Local symplectic homogeneous spaces, and compact semi-simple Lie groups* (preprint).

[3] B.-Y. Chu, *Symplectic homogeneous spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **197**(1974), 145–159.

[4] J. Dorfmeister and Z.-D. Guan, *Fine structure of reductive pseudo-Kählerian spaces*, Geom. Dedicata **39**(1991), 321–338.

[5] S. Helgason, *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces*, American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.

[6] S. Kaneyuki, *On a remarkable class of homogeneous symplectic manifolds*, Proc. Japan Acad. Ser. A, **67**(1991), 128–131.

[7] 金行壮二, アフィン対称空間入門, 部分多様体・湯沢 2003 研究会記録集, (2004), 3–34.

[8] S. Sternberg, *Symplectic homogeneous spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **212**(1975), 113–130.

[9] X. Yichao, *Classification of a class of homogeneous kaehlerian manifolds*, Sci. Sinica Ser. A **29**(1986), 449–463.